



Universitatea Valahia Târgoviște
Facultatea de Științe și Arte
Departamentul de Științe
Bd. Unirii 18, 130082 Târgoviște
www.valahia.ro fs.valahia.ro

Societatea de Științe Matematice din
România
Filiala Dâmbovița
Bd. Regele Carol I 62
www.freewebs.com/ssm_dambovita



Concursul de Matematică CHINDIA

Ediția a IV-a, Târgoviște, 21 Martie 2009

CLASA A XI-A

Subiectul 1. a) Calculați $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2009}$, unde $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$.

b) Determinați mulțimea

$$M = \left\{ B \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 2009 & 9002 \\ 2008 & 8002 \end{pmatrix} B - B \begin{pmatrix} 2009 & 9002 \\ 2008 & 8002 \end{pmatrix} = I_2 \right\}.$$

Cristinel Mortici și Dinu Teodorescu

Subiectul 2. a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2009\sqrt{n^{2009}+1}} + \frac{1}{2009\sqrt{n^{2009}+2}} + \dots + \frac{1}{2009\sqrt{n^{2009}+n}} \right)$.

b) Arătați că șirul $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ este convergent, apoi calculați limita sa, folosind eventual faptul presupus cunoscut că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Cristinel Mortici și Dinu Teodorescu

Subiectul 3. Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

Demonstrați că $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0)$ și deduceți că

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \quad x \geq 0.$$

Cristinel Mortici și Dinu Teodorescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.